

2 体間相互作用システムにおける自律性の数理モデル

○小川 健一朗 (東工大), 三宅 美博 (東工大)

Mathematical Model of Element's Autonomy in Two Body Interaction System

○Ken-ichiro OGAWA (Tokyo Inst. of Tech.) and Yoshihiro MIYAKE (Tokyo Inst. of Tech.)

Abstract: It has been currently pointed out the problem of dependency, including excessive care, in the field of rehabilitation. In particular, when a therapist provides a patient with care based on the interaction between them, if their relationship becomes strong, they may be trapped in co-dependency relationship. Such a phenomenon would be mathematically treated as the problem of interaction strength, whereas the phenomenon arises a systematic question whether an element can handle the interaction strength (coupling constant) as a control variable. This question is important for considering element's autonomy in general interaction systems. In this presentation, we take a gait rehabilitation system that generates rhythmic cues interacting with patient gait rhythms for example, and look at a mathematical model of element's autonomy in a two body interaction system.

Keywords: Interaction Systems, Element's Autonomy, Element's Observation

1. 緒言

従来, パーキンソン病などの歩行障害を有する患者に対するリハビリテーションとして, 外部から一定のリズム音を与える歩行トレーニングが行われている。これにより患者の歩行周期の変動が改善されることが知られている[1]。しかし, このような一方向的な介護は過介護の問題を引き起こし, 患者の自律的な歩行の改善を阻害する側面を有する。

それに対して, 人間の歩行リズムと相互に引き込むようなリズムを患者に与える双方向的な歩行支援装置 (WalkMate) が提案されている[2]。この装置は,

$$\frac{d}{dt} \theta_m(t) = \omega_m(t) - \kappa \sin(\theta_h(t) - \theta_m(t)), \dots (1)$$

$$\frac{d}{dt} \omega_m(t) = -\mu \sin(C - \theta_h(t) + \theta_m(t)) \dots (2)$$

で記述されるアルゴリズムをリズム生成のための内部モデルとして実装している。ここで, θ_m はシステムの生成するリズム音の位相を表す出力変数, θ_h は患者の歩行リズムの位相を表す入力変数である。 ω_m はシステムの固有振動数を表す定数, C は目標位相差を表す定数である。そして, μ と κ は患者とシステムとの相互作用の強さを表す結合定数である。この歩行支援システムの特徴は, 患者との相互作用の仕方を内部モデルとして有していることにある。この装置をパーキンソン病患者に適用すると, 患者の歩行周期のゆらぎ特性が改善されることが分かった[3], [4]。その際, 患者は装置からのリズム音に注意しないように指示されている。これは患者が装置の生成するリズム音と相互作用して装

置と同調状態にあるにも関わらず, 自律的に歩行できる可能性を示唆している。この研究は“コミュニケーションにおける自律性のあり方”を考える上で興味深い, そのメカニズムは明らかでない。これを解明することは重要である。なぜなら, コミュニケーションは常に共依存の危険性を孕んでおり, このことは歩行リハビリテーションにおいて問題となるからである。患者の療法士に対する依存度が高いと最終的に自律した歩行の改善を望むことはできない。

この問題に取り組むためには理論的なアプローチが必要である。従来, 生命現象に関する要素間のコミュニケーションは数理モデルの上では相互作用という形式で記述されてきた。例えば, 蛍の発光の集団同期現象を記述するモデルとして, 自励振動子としての蛍同士が特定の相互作用を行う数理モデル

$$\frac{d}{dt} \theta_i(t) = \omega_i(t), \dots (3)$$

$$\frac{d}{dt} \omega_i(t) = \kappa(\Omega_i - \omega_i(t)) + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j(t) - \theta_i(t)) \dots (4)$$

が提唱されている[5], [6]。ここで, i は蛍の個体数を表す ($i=1, \dots, N$)。また, θ_i は i 番目の蛍の発光の位相を表す変数である。 ω_i は i 番目の蛍の発光の固有振動数を表す定数である。そして, K は i 番目と j 番目の蛍同士の相互作用の強さを表す結合定数である。ここで, 先ほどの歩行支援装置と同様に, 各要素 (蛍) が式(3), (4)で記述されるメカニズムを発光のための

内部モデルとして有していると考えてみる。このとき、このシステムは、本来自律系（閉鎖系）として設定された要素（式(1), (2)の右辺第 1 項）が相手との相互作用（式(2)の右辺第 2 項）により非自律系（開放系）へと移行し、システムとして自律系となるように構成されている（Fig. 1）。

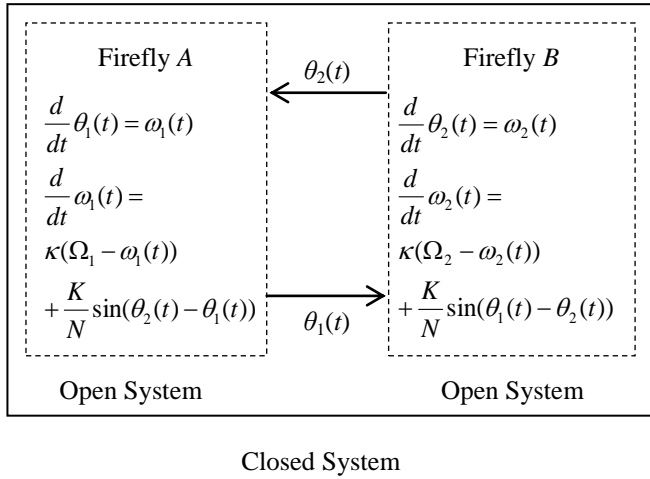


Fig. 1: Emission system composed of two fireflies having internal models. Each internal model includes an interaction term.

このように要素間の相互作用に基づき生命現象におけるパターン形成を説明する数理モデルはその他にも数多く提唱されている[7]。それらの数理モデルにおいては、相互作用が消失する極限でしか要素の自律性は保障されず、その時には逆にシステムは自律性を失うというジレンマを抱えている（Fig. 2）。

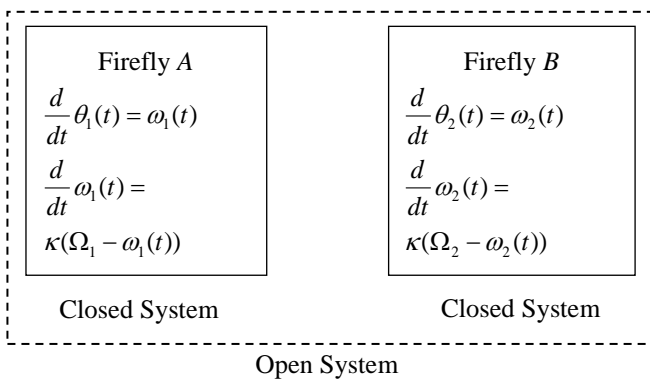


Fig. 2: Emission system composed of two autonomous fireflies having internal models.

これに関し、生命システムにおける要素の自律的な振る舞いを支えるものとして“要素による主体的な観測行為”に注目し、多細胞生物の発生過程における細胞の振る舞いを記述する数理モデルが提唱されてい

る[8]。このモデルにより、発生過程で見られる“遺伝子発現のロバスト性”という重要な特徴を、細胞による観測行為の結果として説明することができる。このことは、細胞は外界の情報をそのまま受け取るのではなく、観測に基づき主体的に受け取ることにより、システムのロバスト性に寄与している可能性を示唆する[9], [10]。そこで、本発表では、相互作用システムにおける“要素の自律性”の根拠として“要素による主体的な観測行為”を導入し、“要素間の相互作用と要素の自律性”を両立可能とする自律分散システムの数理モデルについて考察する。

2. 内部モデルを有する要素

ここでは理解を容易にするため、もっとも簡単な 2 つの要素からなる相互作用システムを考える。これらの要素はそれぞれシステム外部の観測者から状態変数 A, B で記述されるものとする。このとき、状態 A, B の時間変化を表すダイナミクスは、システム外部の観測者からは典型的には、

$$\frac{d}{dt} A(t) = F_S(A) + F_I(A, B), \dots \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt} B(t) = G_S(B) + G_I(B, A) \dots \quad (6)$$

と記述される。ここで、 F_S, G_S はそれぞれ定数項、線形項を含む自己相互作用項、 F_I, G_I は要素間相互作用項である。

ここで、上記の歩行支援システムの立場と同じく、要素 A は式(5)を内部モデルとして有し、同じく要素 B は式(6)を内部モデルとして有するものと仮定する。このとき、要素 A, B 間には A から B へは入力 $A(t)$ 、 B から A へは入力 $B(t)$ があるものと考えられる。また、自律的であるとは閉鎖系、つまり数理的には変数に対してダイナミクスが閉じている系のこととする。逆に、そうでない系を開放系とする。例えば、式(5), (6)において、 $F_S = G_S = 0$ の場合、変数 A, B で規定された各要素は閉鎖系となるので、それぞれ自律的である。それゆえ、この場合、システムとしては開放系となる（Fig. 3）。

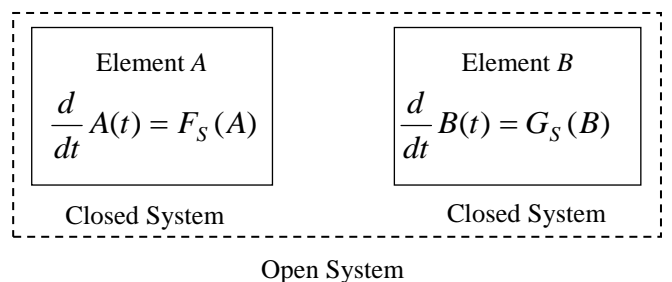


Fig. 3: Open system composed of two autonomous elements having internal models.

一方, $F_S \neq 0$, $G_S \neq 0$ の場合, 各要素は開放系となり, システムは閉鎖系となる (Fig. 4). それゆえ, この場合, 各要素は自律的ではない.

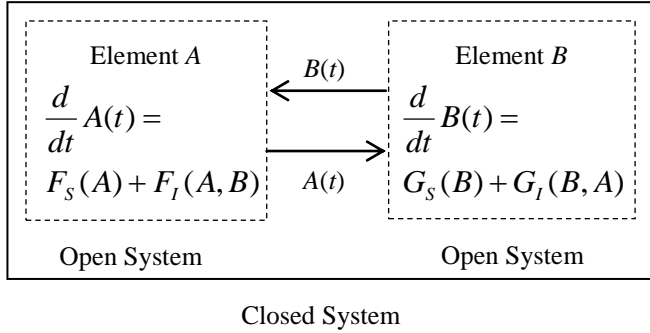


Fig. 4: Closed system composed of two elements having internal models. Each internal model includes an interaction term.

3. 要素による観測に基づく要素の自律性

この前提の下で, 新たに要素 A , B がお互いを観測することを考える. 各要素 A , B の観測行為を作用素 U , V で記述した場合, 要素 A , B はそれぞれお互いの状態の観測結果として

$$A'(t) = UB(t), \dots (7)$$

$$B'(t) = VA(t) \dots (8)$$

を入力することになる. このとき, 式(5), (6)はそれぞれ,

$$\frac{d}{dt} A(t) = F_S(A) + F_I(A, A'), \dots (9)$$

$$\frac{d}{dt} B(t) = G_S(B) + G_I(B, B') \dots (10)$$

と変更される.

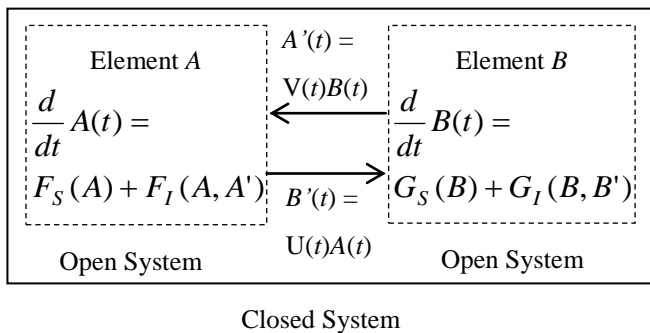


Fig. 5: Inter-observation system composed of two elements

having internal models. Each internal model includes an inter-observation term. This term is described as an interaction with the other one observed by the element.

この時点では, 式(9), (10)でそれぞれ記述される要素 A , B は開放系であるため, 自律的には振る舞うことはできない (Fig. 5).

しかし, 各要素には観測可能なもう一つの対象として相手の状態のダイナミクスがある[10]. 観測された状態 $A'(t)$, $B'(t)$ に基づくものとして, 例えば,

$$\frac{d}{dt_A} A'(t) = G_S(A'), \dots (11)$$

$$\frac{d}{dt_B} B'(t) = F_S(B') \dots (12)$$

というダイナミクスを相手の内部モデルとして新たに獲得することができる. ここで, 式(11), (12)の微分記号は, それぞれ要素 A , B に固有の時間スケールに基づく微分作用素である. これにより, 要素 A は式(9)と式(11)とで閉鎖系をなし, 要素 B は式(10)と式(12)とで閉鎖系をなすことになる. さらに, 式(7)~(12)をもってシステムも閉鎖系となる (Fig. 6).

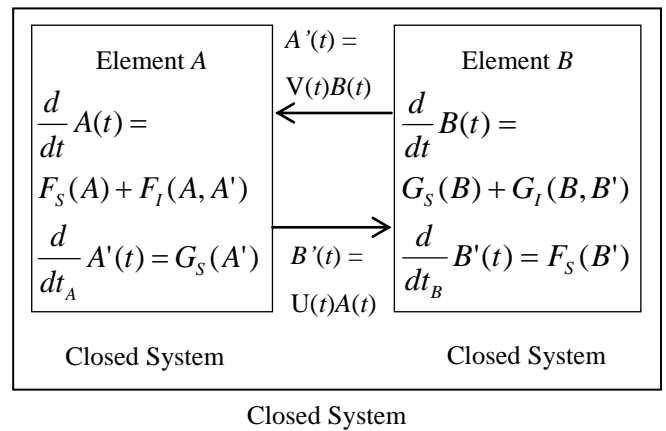


Fig. 6: Autonomous distributed system composed of two elements having internal models. Each internal model includes an interaction term. The interaction term is described as an interaction with the other one observed by the element.

このことから, 自己相互作用項 F_S , G_S と要素間相互作用項 F_I , G_I の形に応じて, 各要素 A , B の自律性を保ちつつ, システムとして大域的で秩序だったパターンを形成することができる. なお, 本モデルの数理的な基盤は圏論や微分位相幾何学によって与えられる[11], [12].

4. 結言

以上のことから、生命システムのような自立分散システムにおいて要素間に相互作用が働いている時にも要素の自律性が保たれるためには、各要素が相互観測に基づき他の要素のダイナミクスの一部を自らの内部ダイナミクスとして獲得することが必要となることが数理的に示された。このような数理モデルを歩行支援装置の内部モデルとして実装することで、患者との間でより円滑なコミュニケーションを行う歩行リハビリテーション技術を構築することが期待できる。

参考文献

- [1] M.H. Thaut and M. Abiru, “Rhythmic Auditory Stimulation in Rehabilitation of Movement Disorders: a Review of the Current Research”, *Music Perception*, 27, pp. 263-269 (2010).
- [2] Y. Miyake, “Interpersonal synchronization of body motion and the Walk-Mate walking support robot”, *IEEE Transactions on Robotics*, Vol.25, No.3, pp.638-644 (2009).
- [3] H. Uchitomi, L. Ota, K. Ogawa, S. Orimo, and Y. Miyake, “Interactive Rhythmic Cue Facilitates Gate Relarning in Patients with Parkinson’s Disease”, *PLoS ONE*, Vol. 8, Issue 9, e82176 (2013).
- [4] M.J. Hove, K. Suzuki, H. Uchitomi, S. Orimo, and Y. Miyake, “Interactive Rhythmic Auditory Stimulation Reinstates Natural 1/f Timing in Gait of Parkinson’s Patients”, *PLoS ONE*, 7(3), e32600, pp.1-8 (2012).
- [5] Y. Kuramoto, “Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence”, *Springer Series in Synergetics*, Vol. 19, Springer-Verlag, Berlin (1984).
- [6] B. Ermentout, “An Adaptive Model for Synchrony in the Firefly *Pteroptyx Malaccae*”, *Journal of Mathematical Biology*, Vol. 29, pp. 571-585 (1991).
- [7] J.D. Murray, “Mathematical Biology”, Springer-Verlag, Berlin (1989).
- [8] K. Ogawa and Y. Miyake, “Generation Model of Positional Values as Cell Operation during the Development of Multicellular Organisms”, *BioSystems*, Vol. 103, pp. 400-409 (2011).
- [9] F.J. Varela, E. Thompson, and E. Rosch, “The Embodied Mind: Cognitive Science and Human Experience”, MIT Press, Cambridge (1999).
- [10] R. Robert, “Life Itself: A Comprehensive Inquiry into the Nature, Origin, and Fabrication of Life”, Columbia University Press, New York (1991).
- [11] S. Awodey, “Category Theory”, Oxford University Press, New York (2006).
- [12] C.J. Isham, *Modern Differential Geometry for Physicists*, 2nd-ed., World Scientific Publishing, Co. Pte. Ltd., Singapore (2003).